Institutt for lærerutdanning
Matematikksenteret

Representasjoner i matematikk

Forfatter:

Olaug Ellen Lona Svingen

Publisert dato: 18. desember, 2018, revidert 13. november 2020

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

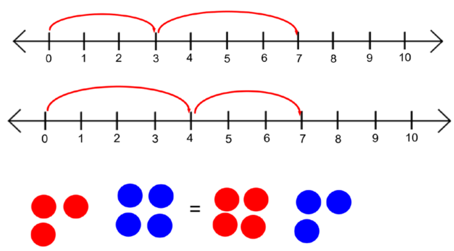
NTNU
Institutt for lærerutdanning, Matematikksenteret

Kaja kommer med en prestekrage i hånda. Hun kan føle, smake og lukte på prestekragen. Hun kan lære leken med å plukke ut ett og ett kronblad for å se om hun blir gift. Hun kan få mange fysiske erfaringer med hva en prestekrage er, og hva den består av. Hva om hun skal gjøre det samme med tallet *fire*? Det lar seg ikke direkte føle, smake og lukte på. Hun kan ta og føle på en mengde med fire brikker, telle en – to – tre – fire og skrive fire med tallsymbolet 4. Dette er ulike representasjoner for begrepet fire, men begrepet i seg selv er abstrakt.

Matematiske objekter er abstrakte, og derfor er de bare tilgjengelige gjennom ulike representasjoner (Duval, 2006). I denne artikkelen blir *matematisk objekt*[1] brukt om matematiske begreper, ideer og operasjoner.

Tallet *fire* er et eksempel på et matematisk begrep. Det matematiske objektet *fire* er knyttet både til antallet fire og plasseringen det har i en rekkefølge av tall. Det kan framstilles på ulike måter, med ulike representasjoner: ved å vise fire fingre, skrive tallet fire, si fire, plassere tallet 4 på tallinja, osv.

Det matematiske objektet *kommutativ egenskap i addisjon* er et eksempel på en matematisk idé. Den matematiske ideen er at rekkefølgen ikke har betydning for helheten når man slår sammen to mengder. Illustrasjonen til høyre viser hvordan den kommutative egenskapen kan representeres på to ulike måter, ved hjelp av tallinja og med konkreter.



Figur 1 Den kommutative egenskapen i addisjon

Det matematiske objektet *addisjon* er et eksempel på en operasjon. Det innebærer at man kan legge til en endring, slå sammen mengder, sammenligne og utligne ulikheter. Addisjon kan representeres ved hjelp av tallinja, konkreter, symboler osv. Addisjon kan også representeres ved ulike kontekster. Her er fire eksempler:

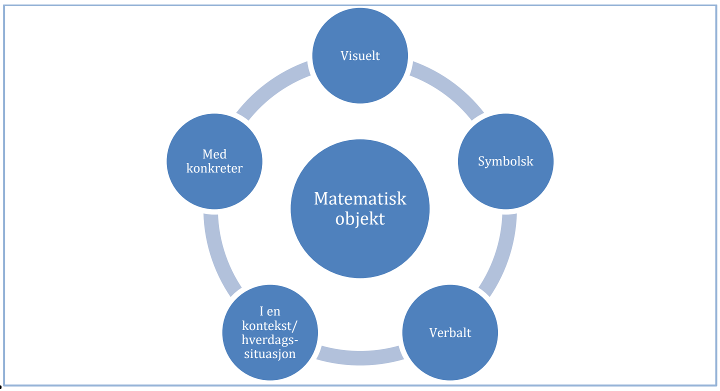
1. *Kari har tre drops. Hun får to til. Hvor mange drops har Kari?*
2. *Kari har tre blå og fire gule drops. Hvor mange drops har Kari?*

[1] Begrepet matematisk objekt brukes på ulike måter i faglitteraturen. For å gjøre teksten lettere å lese har jeg valgt å bruke begrepet om begrep, ideer og operasjoner.

3. *Kari har 13 drops. Hilde har 5 flere. Hvor mange drops har Hilde?*
4. *Kari har tre drops. Hun får fire til. Da har hun like mange som Hilde.*
   Hvor mange drops har Hilde?

Disse fire eksemplene viser ulike aspekter ved addisjon.
Å kunne bruke matematiske representasjoner og oppdage sammenhenger mellom ulike representasjoner er en viktig del av å utvikle dyp matematisk forståelse (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Niss & Jensen, 2002; Utdanningsdirektoratet, 2018). Tegn og symboler har stor betydning når man skal arbeide med og forstå matematikk. En representasjon er ikke identisk med det matematiske objektet. Ensidig vektlegging av tegn og symboler som representasjoner kan gi inntrykk av at tegnene og symbolene er matematiske objekter. Vi må arbeide med ulike representasjoner, slik at elevene ser det matematiske objektet på ulike måter, og dermed utvikler god forståelse av hva det matematiske objektet er.

Det er vanlig å vise til fem ulike representasjoner for matematiske objekter: visuelle, konkreter, kontekst/hverdagssituasjoner, verbale og symbolske (Kilpatrick et al., 2001; Lesh, Cramer, Doerr, Post, & Zawojewski, 2003), se figur 2.

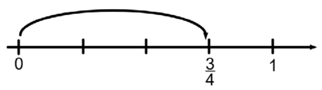
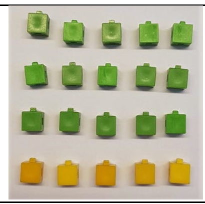


.

Figur 2 Representasjoner for matematiske objekter

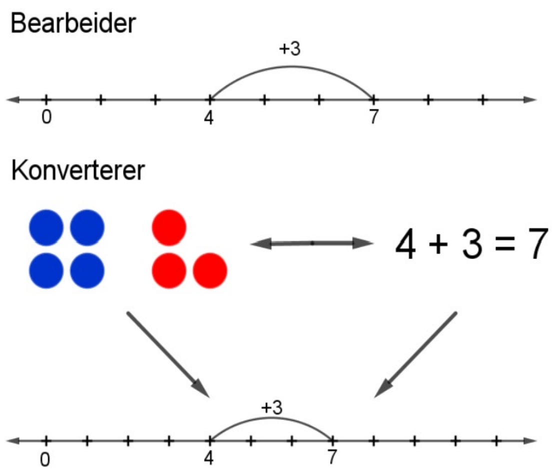
Disse representasjonene er tilsynelatende veldig ulike, men de er uttrykk for samme matematiske objekt. For å kunne utvikle dyp forståelse i matematikk må man være i stand til å se sammenhenger mellom de ulike representasjonene. Det blir viktig når man skal lære matematikk. Pedagogen må legge til rette for at elevene møter ulike representasjoner i undervisningen, og trekke fram sammenhengene mellom representasjonene. Figur 3 viser ulike representasjoner av brøken ¾. I arbeidet med brøk er det viktig at elevene ser sammenhenger og kan kjenne igjen brøken i de ulike representasjonene.

Eksempel: Brøk

Symbolsk	**Visuelt**	**Verbalt**	**I en kontekst**	**Med konkreter**
$\frac{3}{4}$		Tre firedeler	Fire barn deler tre sjokolader likt	

Figur 3 Ulike representasjoner av brøken 3/4

Siden matematiske objekter er abstrakte, vil man møte ulike representasjoner når man arbeider med matematikk. Representasjonene kan enten bearbeides eller konverteres. Når man jobber innenfor samme representasjon, bearbeider man den. Hvis man derimot skifter mellom ulike representasjoner, konverterer man mellom ulike representasjoner (Duval, 2006). For å utvikle dypere matematisk forståelse er det viktig at man gjør begge deler: både bearbeider innenfor samme representasjon og konverterer mellom ulike representasjoner (figur 4). Arbeider man bare med konkreter, vil man ikke utvikle forståelse av tall og symboler. Det er nødvendig å knytte representasjonene sammen og vise at de er to sider av samme sak. For elever som presterer lavt i matematikk, er det særs viktig å oppdage sammenhenger mellom ulike representasjoner.



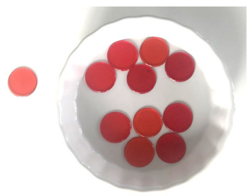
Figur 4 Eksempel på bearbeiding og konvertering

Egenskaper ved ulike representasjoner

Det er viktig å tenke igjennom hensikten med valg av representasjoner. Hvilke representasjoner som er hensiktsmessige for å utvikle bedre forståelse, kan vurderes ut fra følgende fem egenskaper: synlighet, effektivitet, generalitet, klarhet og presisjon (Kilpatrick et al., 2001). Å vurdere representasjoner ut fra disse egenskapene er nyttig for å kunne velge representasjoner som er hensiktsmessige.

Ulike representasjoner kan støtte opp om og synliggjøre matematiske objekter, men elevene selv må konstruere objektene mentalt. Med utgangspunkt i de fem egenskapene kan læreren vurdere i hvilken grad en representasjon vil være til støtte for elevene i forståelsen av det matematiske objektet. Vi skal se et eksempel på vurdering ut fra de fem egenskapene: forståelse av posisjonssystemet. Det matematiske objektet her er ideen om at ti kan være én tier, men også ti enere.

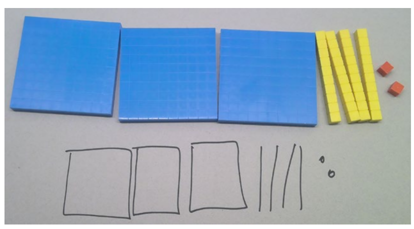
Synlighet: Når man skal vurdere synlighet, kan man spørre i hvilken grad den valgte representasjonen viser det matematiske objektet. Den matematiske ideen om at ti kan være én tier eller ti enere, vil være mer synlig i base 10 materiell eller i hundrerutenett enn i penger. Base 10 materiell er ferdiggruppert, og forholdet mellom enere og tiere er proporsjonalt – en tier er ti ganger større enn en ener. Centikuber, pinner i bunter, kuler i skåler og tellebrikker er eksempler på proporsjonale konkreter. Det er ikke like innlysende at ti enkronemynter er det samme som en tikronemynt. En tikronemynt er ikke ti ganger større enn en enkronemynt.



Figur 6 Proporsjonal representasjon

Figur 6 Ikke proporsjonal representasjon

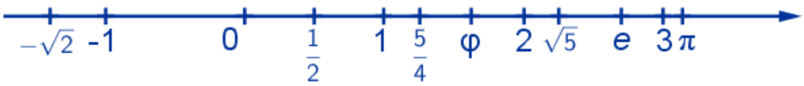
Effektivitet: Det er ønskelig at elevene utforsker effektive representasjoner. Utforskingen må gå i takt med elevenes forståelse. De symbolske representasjonene er effektive, men setter store krav til at elevene forstår hva de kommuniserer. Elever som har behov for å se alle hundrerne og tierne, kan synes at base 10 materiell er mer effektivt enn å tegne alt. På sikt kan



Figur 7 Fra base 10 materiell til tegning

tegning bli mer effektivt enn å bruke base 10 materiell om man utvikler effektive måter å tegne hundrere, tiere og enere på.

Generalitet: En vurdering av representasjonene er om de kan brukes på et bredt spekter av matematiske objekter. Perlesnor er ikke en generell representasjon. Den fungerer med hele tall, men ikke med desimaltall. Den er heller ikke særlig praktisk når man skal jobbe med større tall. Tallinja gir mulighet til å utvide fra hele tall til rasjonale tall og irrasjonale tall.



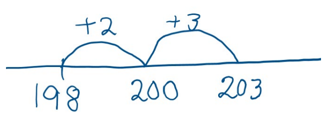
Figur 8 Tallinje med hele tall, rasjonale og irrasjonale tall

I arbeidet med ulike representasjoner er det nødvendig å ha som mål at man skal utvikle forståelse av representasjoner som er brukbare, etter hvert som man blir introdusert for nye aspekter ved posisjonssystemet.

Klarhet: Er den valgte representasjonen forståelig og enkel i bruk? Hvordan en representasjon skal brukes, er utviklet over tid og noe man er blitt enig om. Tallinje er et eksempel på at man gjennom bruk legger til rette for en felles forståelse av hva den er, og hvordan den kan brukes. Tall skrives i stigende rekkefølge, og tallintervallene deles inn i riktig størrelsesforhold. Flytter man seg ti steg til høyre på tallinja, blir tallet en tier større.

Figur 9 Ti steg til høyre øker tallverdien med en tier

Presisjon: Her vurderer man hvor nøyaktig representasjonen er. Tallinja kan ha ulik grad av presisjon. Når man forstår grunnprinsippene for tallinja, kan man bruke den mer som en mental støtte, og trenger verken å skrive alle tallene eller ha riktig avstand mellom dem. Dette er et eksempel på en åpen tallinje, der bare rekkefølgen av tallene etter størrelse er viktig.

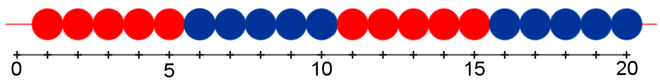


Figur 10 Addisjon på åpen tallinje

En tallinje som modell for alle reelle tall skal ha både rekkefølge og størrelsesforhold presist avmerket, og er et eksempel på stor presisjon.

Valg av representasjon

Alle egenskapene trenger ikke å være til stede for å velge en representasjon, men egenskapene kan være en støtte til å vurdere når ulike representasjoner er hensiktsmessige. I arbeid med forståelsen av tall kan elevene bruke en perlesnor. Men etter hvert bør de kunne jobbe uten å bruke perlesnora, den er tungvint å bruke i det lange løp. Kobler man en visuell representasjon til perlesnora, vil tallinja være et naturlig valg. Man kan tegne snora som en rett linje, og i stedet for å tegne hver perle setter man et merke for hver perle (Dahl & Nohr, 2010).



Figur 11 Konvertering fra perlesnor til tallinje

En lignende kobling kan gjøres mellom centikuber og hundrerutenettet. Etter at man har jobbet konkret med centikuber, kan de knyttes til hundrerutenettet. Målet må hele tiden være å tilby elevene verktøy som kan støtte tenkningen deres. Å jobbe med konkreter, for deretter å utvikle visuelle representasjoner som også knyttes til symbolske representasjoner, vil gi elevene dypere forståelse av de matematiske objektene.

Bruk av representasjoner i undervisningen

Et av hovedproblemene for elever som presterer lavt i matematikk, er at de har uklar forståelse av sammenhengen mellom abstrakte symboler og andre matematiske representasjoner (Gersten et al., 2014). Systematisk undervisning om sammenhengen mellom ulike representasjoner er nødvendig for å utvikle robuste begreper i matematikk. Det er tradisjon å bruke konkretiseringsmateriell mye i begynneropplæringen. Etter hvert som elevene blir eldre, bruker man i større grad symbolske representasjoner. Konkretiseringsmateriell kan være effektivt uansett alderen på elevene, men ubevisst forhold til bruk av konkreter kan være et hinder for elevenes læringsutbytte. En undervisning der læreren viser hvordan konkretiseringsmateriellet skal brukes trinn for trinn, er like lite produktivt som der elevene får fritt spillerom og jobber uten veiledning (Stein & Bovalino, 2001). Hvis læreren styrer elevene skritt for skritt gjennom aktiviteten, får de ikke rom til å tenke igjennom og skape mening i aktiviteten. Da tar læreren en snarvei forbi elevenes egen tenkning, og viser dem hvordan de skal gjøre det. Skal bruk av konkretiseringsmateriell gi mening, må eleven selv skape sammenheng mellom representasjonen og det matematiske objektet. Det er ikke nok å få det fortalt. I motsatt ende av skalaen, der elevene jobber fritt med konkretiseringsmateriell, blir de i for stor grad overlatt til seg selv. Dette fremmer usystematisk og uproduktiv bruk av konkretiseringsmateriellet. Eleven må selv finne sammenhengen mellom konkretiseringsmateriellet og det matematiske objektet, og denne sammenhengen trenger ikke å være opplagt. Det som er en opplagt kobling mellom konkretiseringsmateriell og det matematiske objektet for læreren, trenger ikke å være like opplagt for eleven. Konkretiseringsmateriell er laget for å synliggjøre et matematisk objekt. Når sammenhengen mellom konkretiseringsmateriellet og det matematiske objektet er forstått, ser man sammenhengen tydelig. Men for de som ikke kjenner til hvilket matematisk objekt konkretiseringsmateriellet skal representere, blir denne sammenhengen uklar.

Disse fire prinsippene kan beskrive effektiviteten av bruk av konkretiseringsmateriell (Laski, Jor'dan, Daoust, & Murray, 2015):

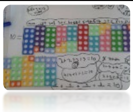
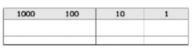
1. Bruk konkretiseringsmateriell konsekvent og over lang tid. Elevene trenger tid til å bli kjent med materiellet og skape sammenheng mellom materiellet og det matematiske objektet.
2. Begynn med konkrete representasjoner der det matematiske objektet er godt synlig, og gå gradvis over til representasjoner som er mer abstrakte. Konkretiseringsmateriell der den fysiske likheten mellom den fysiske representasjonen og det matematiske objektet er tydelig, vil gi elevene større mulighet til å se sammenhengen mellom dem.
3. Unngå konkretiseringsmateriell som ligner hverdagsobjekter og har distraherende og irrelevante egenskaper. Konkretiseringsmateriell kan betraktes fra to ulike posisjoner, som et objekt for sin egen del og som et symbol for et matematisk objekt. Når et konkretiseringsmateriell er spennende å utforske for sin egen del, eller har egenskaper som er irrelevante for det matematiske objektet, kan det distrahere og hindre eleven i å se sammenhengen mellom representasjon og matematisk objekt.
4. Vis sammenhengen mellom konkretiseringsmateriell og matematisk objekt klart og presist. Det er urealistisk å tro at et elevene selv skal kunne se denne sammenhengen uten veiledning.

I avsnittene over er det beskrevet hvordan bruk av konkretiseringsmateriell kan gi økt læring. Disse beskrivelsene vil også ha betydning for bruk av andre representasjoner, for eksempel visuelle representasjoner. I læring av nye matematiske objekter vil det være nødvendig å bruke ulike representasjoner, uansett hvor gamle elevene er. Å inkludere ulike representasjoner i undervisningen krever forberedelse av læreren. Det er nødvendig å ha oversikt over og være kjent med fordeler og ulemper ved ulike representasjoner. I forberedelsene er det viktig å tenke igjennom hvordan ulike representasjoner skal brukes og knyttes sammen. Læreren må selv løse oppgaven ved hjelp av representasjoner han eller hun tenker å bruke. Sist, men ikke minst, er det viktig å tenke igjennom den praktiske gjennomføringen i klasserommet og plasseringen av elevene, og gjøre klar materiell som elevene skal bruke (Stein & Bovalino, 2001).

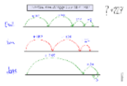
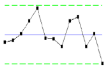
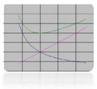
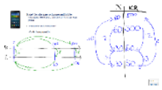
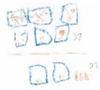
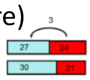
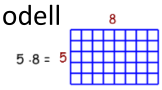
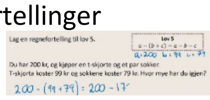
Det er ønskelig at så mange elever som mulig får utbytte av det ordinære tilbudet. Ved at man bruker ulike representasjoner i klasserommet, vil flere kunne delta. Elever som har behov for særlig tilrettelegging, har samme behov for å utvikle forståelse for sammenhenger mellom ulike representasjoner som alle andre. Bruk av representasjoner blir derfor sentralt i all undervisning, både i ordinær undervisning og når det er særskilte behov. Uansett hvilket nivå undervisningen foregår på, er grundig planlegging og vurdering viktig for at utbyttet til elevene skal bli best mulig.

NTNU
Institutt for lærerutdanning, Matematikksenteret

Eksempler på representasjoner

KONKRETER	
Proporsjonale[2]	**Egenskaper – egne notater**
Numicon 	
Perlesnor 	
Tellebrikker, unifixbrikker o.l. 	
Tibasemateriell 	
Brøkbrikker 	
Cuisenairestaver 	
Kulerammer 	
Ikke-proporsjonale	
Penger 	
Posisjonstabell 	
Andre	
Geobrett 	
Klosser 	
Geometriske figurer 	
Jovobrikker 	

[2] Proporsjonale representasjoner er representasjoner for posisjonssystemet, der en representasjon for ti er ti ganger større enn en ener, og en hundrer er ti ganger større enn en tier.

VISUELLE	
	Egenskaper – egne notater
Tallinjer 	
Grafer  	
Tabeller 	
Hundrerutenett 	
Tegning 	
Barmodell (Singapore) 	
Rutenett/arealmodell 	
MUNTLIG	
Elevens eget språk 	
SYMBOLSK	
Tall 123 456 789	
Bokstaver a b x y	
Symboler π % ∞	
KONTEKST	
Regnefortellinger 	
Hverdagssituasjoner 	

Referanser

Uncategorized References

Dahl, H. H., & Nohr, M. E. (2010). Perlesnor og tom tallinje. *Tangenten, 1*, 2-7.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-102), p.103-131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z

Gersten, R., Compton, D., Connor, C. M., Dimino, J., Santoro, L., Linan-Thompson, S., & David Tilly, W. (2014). *Assisting students struggling with reading: Response to intervention and multi-tier intervention in the primary grades*.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding it up. *Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Washington, DC: National Academy Press*.

Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Daoust, C., & Murray, A. K. J. S. O. (2015). What makes mathematics manipulatives effective? Lessons from cognitive science and Montessori education. *5*(2), 2158244015589588.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H., Post, T., & Zawojewski, J. (2003). Model development sequences.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Vol. 18): Undervisningsministeriet.

Stein, M. K., & Bovalino, J. W. (2001). Manipulatives: One piece of the puzzle. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(6), 356.

Utdanningsdirektoratet. (2018). Høringsutkast kjerneelementer i Matematikk fellesfag og programfag. Retrieved from https://hoering.udir.no/Hoering/v2/197?notatId=358